Задача 1

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике. (*1 балл*)

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = \dfrac{y-b}{8b}, \ u'_x\big|_{x=a} = 0; \\ u'_y\big|_{y=0} = -\dfrac{1}{2a}\sin\dfrac{\pi x}{2a}, \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{5\pi x}{2a}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{y(2b-y)}{4b^3}, \ u\big|_{x=a} = 0; \\ u'_y\big|_{y=0} = -\dfrac{3}{2a}\cos\dfrac{3\pi x}{2a}, \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{1}{2a}\cos\dfrac{3\pi x}{2a}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = \dfrac{y-b}{8b}, \ u\big|_{x=a} = 0; \\ u'_y\big|_{y=0} = -\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{2\pi x}{a}, \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{y-b}{2b}, \ u'_x\big|_{x=a} = 0; \\ u\big|_{y=0} = 1, \ u\big|_{y=b} = \cos\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = \dfrac{y-b}{2b}, \ u'_x\big|_{x=a} = 0; \\ u\big|_{y=0} = -\sin\dfrac{5\pi x}{2a}, \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{\pi x}{2a}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{y(y-2b)}{64b^2}, \ u'_x\big|_{x=a} = 0; \\ u\big|_{y=0} = -\cos\dfrac{\pi x}{a}, \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{3}{a}\cos\dfrac{3\pi x}{a}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = \dfrac{y(y-2b)}{32b^2}, \ u\big|_{x=a} = 0; \\ u\big|_{y=0} = -\sin\dfrac{2\pi x}{a}, \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{1}{a}\sin\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = -\cos\dfrac{5\pi y}{2b}, \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{1}{2b}\cos\dfrac{\pi y}{2b}; \\ u'_y\big|_{y=0} = \dfrac{x(x-2a)}{64a^3}, \ u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = -\dfrac{1}{b}\cos\dfrac{\pi y}{b}, \ u\big|_{x=a} = 1; \\ u'_y\big|_{y=0} = \dfrac{x-a}{16a^2}, \ u'_y\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = -\cos\dfrac{\pi y}{2b}, \ u\big|_{x=a} = \cos\dfrac{\pi y}{2b}; \\ u'_y\big|_{y=0} = \dfrac{x-a}{2a^2}, \ u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=a} = -\dfrac{1}{b}\sin\dfrac{\pi y}{b}, \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{1}{3b}\sin\dfrac{\pi y}{b}; \\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x(2a-x)}{4a^2}, \ u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = -\sin\dfrac{\pi y}{b}, \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{2}{b}\sin\dfrac{2\pi y}{b}; \\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x(x-2a)}{32a^2}, \ u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = -\dfrac{1}{2b}\sin\dfrac{\pi y}{2b}, \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{3}{2b}\sin\dfrac{3\pi y}{2b}; \\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x(2a-x)}{4a^2}, \ u'_y\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = -\sin\dfrac{\pi y}{2b}, \ u\big|_{x=a} = \sin\dfrac{5\pi y}{2b}; \\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x-a}{2a}, \ u'_y\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = 0, \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{b-y}{16y_0^2}; \\ u'_y\big|_{y=0} = -\dfrac{3}{2a}\sin\dfrac{3\pi x}{2a}, \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{\pi x}{2a}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = 0, \ u\big|_{x=a} = \dfrac{y(y-2b)}{4y_0^2}; \\ u'_y\big|_{y=0} = -\dfrac{1}{2a}\cos\dfrac{\pi x}{2a}, \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{3}{2a}\cos\dfrac{3\pi x}{2a}. \end{cases}$

17. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = 0, \ \ u\big|_{x=a} = \dfrac{b-y}{8b}; \\ u'_y\big|_{y=0} = -\dfrac{4}{a}\sin\dfrac{4\pi x}{a}, \ \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = 0, \ \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{b-y}{2b^2}; \\ u\big|_{y=0} = -\cos\dfrac{2\pi x}{a}, \ \ u\big|_{y=b} = 1. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = 0, \ \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{b-y}{2b^2}; \\ u\big|_{y=0} = \sin\dfrac{\pi x}{2a}, \ \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{3\pi x}{2a}. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = 0, \ \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{y(2b-y)}{64y_0^3}; \\ u\big|_{y=0} = 1, \ \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{1}{a}\cos\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = 0, \ \ u\big|_{x=a} = \dfrac{y(2b-y)}{32b^2}; \\ u\big|_{y=0} = -\sin\dfrac{2\pi x}{a}, \ \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{2}{a}\sin\dfrac{2\pi x}{a}. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = -\cos\dfrac{\pi y}{2b}, \ \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{1}{2b}\cos\dfrac{\pi y}{2b}; \\ u'_y\big|_{y=0} = 0, \ \ u\big|_{y=b} = \dfrac{x(2a-x)}{32a^2}. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = -\dfrac{2}{b}\cos\dfrac{2\pi y}{b}, \ \ u\big|_{x=a} = 1; \\ u'_y\big|_{y=0} = 0, \ \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{a-x}{16a^2}. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u\big|_{x=0} = -\cos\dfrac{3\pi y}{2b}, \ \ u\big|_{x=a} = \cos\dfrac{\pi y}{2b}; \\ u'_y\big|_{y=0} = 0, \ \ u\big|_{y=b} = \dfrac{a-x}{2a}. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = -\dfrac{3}{b}\sin\dfrac{3\pi y}{b}, \ \ u'_x\big|_{x=a} = \dfrac{1}{b}\sin\dfrac{\pi y}{b}; \\ u\big|_{y=0} = 0, \ \ u\big|_{y=b} = \dfrac{x(x-2a)}{4a^2}. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{y^2}{b^2}, \ \ u\big|_{x=a} = 0; \\ u'_y\big|_{y=0} = \dfrac{3}{2a}\cos\dfrac{3\pi x}{2a}, \ \ u'_y\big|_{y=b} = \dfrac{1}{2a}\cos\dfrac{\pi x}{2a}. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{b^2-y^2}{8b^2}, \ \ u\big|_{x=a} = 0; \\ u'_y\big|_{y=0} = \dfrac{2}{a}\sin\dfrac{\pi x}{a}, \ \ u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{2\pi x}{a}. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{y(b-y)}{2b^2}, \ \ u'_x\big|_{x=a} = 0; \\ u\big|_{y=0} = 1, \ \ u\big|_{y=b} = \cos\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = 1, \ \ u\big|_{x=a} = \dfrac{1}{b}\cos\dfrac{\pi y}{b}; \\ u'_y\big|_{y=0} = \dfrac{x^2-a^2}{16a^2}, \ \ u'_y\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u'_x\big|_{x=0} = \dfrac{y(y-b)}{2b^2}, \ \ u'_x\big|_{x=a} = 0; \\ u\big|_{y=0} = \cos\dfrac{2\pi x}{a}, \ \ u\big|_{y=b} = \cos\dfrac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

Задача 2

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге. (*1 балл*)

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 3\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 4, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + \sin^2\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 4\sin^3\varphi - \sin^2\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^3\varphi - \cos^2\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 3\sin^3\varphi - \cos^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 4, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi - \sin^2\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = -4\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 4\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - 3\cos\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin^3\varphi - \cos^3\varphi + 3\sin\varphi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 6, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=6} = 2\cos^3\varphi - 3\cos^3\varphi + \cos\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 4, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = -\sin^3\varphi - 2\sin^2\varphi + 3\sin\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 4\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi + \cos^2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 2\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi + \cos\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 4, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^2\varphi - \sin^3\varphi + \cos\varphi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 5, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=5} = 2\sin^3\varphi - \sin\varphi + 2\cos\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 6\sin^3\varphi - \cos^3\varphi + 4\sin\varphi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi + \sin^2\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 4, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 4\sin^3\varphi - \sin\varphi - \cos\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 5, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=5} = -\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \cos\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 4\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + \sin\varphi - 3\cos\varphi. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 3\sin\varphi. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \sin^3\varphi + 2\sin^2\varphi - 3\sin\varphi - \cos\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi + 3\sin^2\varphi. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 5, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=5} = 4\sin^3\varphi + \sin^2\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 4\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + 2\cos\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 4\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi + \cos^2\varphi. \end{cases}$

Задача 3

Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге. (*1 балл*)

1. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 3\cos^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 3, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^3\varphi + 5\cos\varphi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 3, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^3\varphi + \sin^2\varphi - \cos\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \sin^3\varphi + 3\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi - 2\sin\varphi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 5\sin\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi - 6\sin^3\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - \sin^2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 3, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 5\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 3\cos^3\varphi + 5\cos\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 4\sin\varphi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + 12\sin^3\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 3, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \cos^3\varphi - \sin^3\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 5\sin\varphi. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - 2\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 1, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 3, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 2, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \;\; 0 \leqslant r < 4, \;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\varphi + 6\sin^3\varphi. \end{cases}$

Задача 4

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре. (*1 балл*)

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 6\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\vartheta(1 + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(1 + \cos\vartheta\,\sin 2\varphi). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 2\cos\vartheta + 3\sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(\cos\vartheta + \cos 2\varphi). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(1 + \sin 2\varphi). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^2\vartheta(2\cos\vartheta + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \sin\vartheta(\sin\vartheta + \cos\varphi). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(3 + \cos 2\varphi). \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 2, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 3, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 4, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + \sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

Задача 5

Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре. (*1 балл*)

1. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 6\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\vartheta(1 + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(1 + \cos\vartheta\,\sin 2\varphi). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 2\cos\vartheta + 3\sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(\cos\vartheta + \cos 2\varphi). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(1 + \sin 2\varphi). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^2\vartheta(2\cos\vartheta + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \sin\vartheta(\sin\vartheta + \cos\varphi). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 1, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(3 + \cos 2\varphi). \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 3, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \ \ 0 \leqslant r < 4, \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + \sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

Задача 6

Найти функцию Грина заданной краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области $\Omega = \{(r, \varphi)\colon r > 0,\ \alpha < \varphi < \beta\}$ с граничными условиями соответствующего типа. С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи.

Вар.	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	**Типы гран. усл.**		$\boldsymbol{f}$
			$\boldsymbol{\varphi = \alpha}$	$\boldsymbol{\varphi = \beta}$	
1	π	$3\pi/2$	II	I	$\frac{1}{r^4+3}$
2	$3\pi/4$	$5\pi/4$	I	I	$\frac{1}{r^2+1}$
3	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	II	II	e^{-r^2+2}
4	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{1}{r^2+5}$
5	$\pi/2$	π	I	II	re^{-r^2}
6	π	$3\pi/2$	I	I	$\frac{1}{r^4+3}$
7	$-\pi/2$	0	II	II	$\frac{3}{r^2+1}$
8	$-\pi$	$-\pi/2$	II	I	$e^{-r^2}\sin r$
9	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	I	$e^{-r^2}\cos r$
10	$3\pi/4$	$5\pi/4$	II	II	$\frac{1}{r^2+1}$
11	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	I	II	e^{-r^2+2}
12	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{\sin r}{r^2+1}$
13	$\pi/2$	π	I	I	$r^2e^{-r^2}$
14	π	$3\pi/2$	II	II	$\frac{1}{r^4+3}$
15	$-\pi/2$	0	II	I	$\frac{1}{r^2+1}$
16	$-\pi$	$-\pi/2$	I	II	$(r^2+1)e^{-r^2}$
17	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	I	$(r^3+r)e^{-r^2}$
18	$3\pi/4$	$5\pi/4$	II	II	$\frac{1}{r^2+1}e^{-r^2}$
19	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	I	II	$(r^2-2)e^{-r^2+2}$
20	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{\sin r}{r^2+1}$
21	$\pi/2$	π	I	I	$2re^{-r^2}$
22	π	$3\pi/2$	II	II	$\frac{r^3e^{-r^4}}{r^4+3}$
23	$-\pi/2$	0	I	II	$\frac{3}{r^2+1}$
24	$-\pi$	$-\pi/2$	II	I	re^{-r^2}
25	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	II	$e^{-r^2}\sin r$
26	$3\pi/4$	$5\pi/4$	I	I	$\frac{1}{r^2+1}$
27	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	II	II	e^{-r^2+2}
28	$-\pi/4$	$\pi/4$	II	I	$\frac{1}{r^2+5}$
29	$\pi/2$	π	I	II	e^{-r^2}
30	$\pi/4$	$3\pi/4$	I	II	e^{-r^2}